A 55-a OLIMPIADĂ NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Al IV-LEA TEST DE SELECŢIE PENTRU OIM 24 mai 2004

Subiectul 1. Fie m, $m \geq 2$, un număr natural. Un număr natural n se numeşte m-bun dacă pentru orice număr natural a, relativ prim cu n, avem $n | a^m - 1$.

Să se arate că orice număr m-bun este cel mult $4m(2^m - 1)$.

Subiectul 2. Considerăm un punct O în planul unui triunghi ABC. Un cerc $\mathcal{C}$ care trece prin O este tăiat a doua oară de OA, OB, OC în P, Q, respectiv R, iar $\mathcal{C}$ taie a doua oară cercurile $(B, O, C), (A, O, C), (A, O, B)$ în K, L respectiv M.

Demonstraţi că dreptele PK, QL, RM sunt concurente.

Subiectul 3. O parte dintre cele n feţe ale unui poliedru sunt colorate cu negru astfel încât oricare două feţe negre să nu aibă nici un vârf comun. Restul feţelor se colorează cu alb.

Să se arate că numărul muchiilor comune frontierelor a două feţe albe este cel puţin $n - 2$.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 min